11/05/17

δ.ε ⟵ 2ο αντικείμενο σ.σ.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$

Προσδιορίζουμε: $L = L(x_1, \dots, x_n)$:
$U = U(x_1, \dots, x_n)$

$P(L < \theta < U) = 1 - a \leftarrow$ β.ε του δ.ε

δ.ε $\to (L, U)$ σύνηθως 95%
$(a = 0.05)$

Μέθοδο Αναστρεπτέας Ποσότητας

Αναστρεπτή ποσότητα: $Q = Q(x_1, \dots, x_n, \theta)$

Η κατανομή της Q ανεξάρτητη της θ

δ.ε για το μ κανονικού πληθυσμού $N(\mu, \sigma^2)$

I) σ^2 γνωστό

το δ.ε. ελάχιστου μήκους

$$\left(\bar{x} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \bar{x} \pm z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

II) σ^2 άγνωστη

Το δ.ε. ελάχιστου μήκους

$$\bar{x} \pm t_{n-1, \frac{a}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

δ.ε. για την σ^2 κανονικού πληθυσμού $N(\mu, \sigma^2)$

I) ~~γνωστό~~

μ γνωστό

$$x_i \sim N(\mu, \sigma^2), \ \forall i = 1, \dots, n \ \text{ανεξ.} \Rightarrow \frac{x_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \ \forall i = 1, \dots, n$$

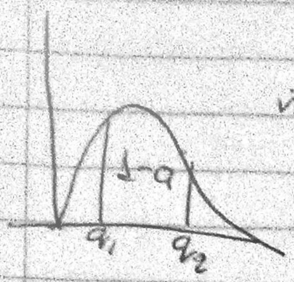
$$\Rightarrow \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim N(0,1)^2 \equiv \chi_1^2, \ \forall i = 1, \dots, n \ \text{ανεξάρτητα}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \underset{\text{ανεξ}}{\sum_{i=1}^{n} \chi_1^2} \equiv \chi^2_{\sum_{i=1}^{n} 1} \equiv \underset{\text{ανεξάρ. } \sigma^2}{\chi_n^2}$$

Θεωρώ την ποσότητα $Q_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$

Η $Q \sim \chi_n^2$ ανεξ. της θ. Άρα Q αναστρεπτή

Αφού Q αντιστρ. $\exists q_1, q_2$, $0 < q_1 < q_2$ τέτοια ώστε:



$$P(q_1 < Q < q_2) = 1-a$$

ή $$F_{\chi^2_n}(q_2) - F_{\chi^2_n}(q_1) = 1-a$$

ή $$\int_{q_1}^{q_2} f_{\chi^2_n}(q)\,dq = 1-a \quad (*)$$

$$1-a = P(q_1 < Q < q_2)$$
$$= P\left(q_1 < \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\sigma^2} < q_2\right)$$
$$\Longrightarrow P\left(\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{q_1}\right) = 1-a$$

Άρα ένα $100(1-a)\%$ δ.ε για σ^2 είναι:

$$\left(\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{q_2}, \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{q_1}\right)$$

<u>Εύρεση δ.ε ελάχιστου μήκους</u>

$$l = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)$$

Εύρεση q_1, q_2 που ελαχ. το l ή το $l^* = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}$

$$\frac{dl^*}{dq_1} = -\frac{1}{q_1^2} - \frac{d}{dq_1}\left(\frac{1}{q_2}\right) = -\frac{1}{q_1^2} - \frac{d}{dq_2}\left(\frac{1}{q_2}\right)\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{1}{q_2^2}\frac{dq_2}{dq_1} - \frac{1}{q_1^2} \quad (1)$$

Αλλά $F_{\chi^2_n}(q_2) - F_{\chi^2_n}(q_1) = 1-a \Rightarrow \frac{d}{dq_1}\left(F_{\chi^2_n}(q_2) - F_{\chi^2_n}(q_1)\right) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dq_2} F_{\chi^2_n}(q_2)\right)\frac{dq_2}{dq_1} - \frac{d}{dq_1} F_{\chi^2_n}(q_1) = 0$$

$$\Rightarrow f_{\chi^2_n}(q_2)\frac{dq_2}{dq_1} - f_{\chi^2_n}(q_1) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_{\chi^2_n}(q_1)}{f_{\chi^2_n}(q_2)} \quad (2)$$

Από (1), (2) και $\frac{dl^*}{dq_1} = 0 \Rightarrow \frac{f_{\chi^2_n}(q_1)}{f_{\chi^2_n}(q_2)} = \frac{q_2^2}{q_1^2}$

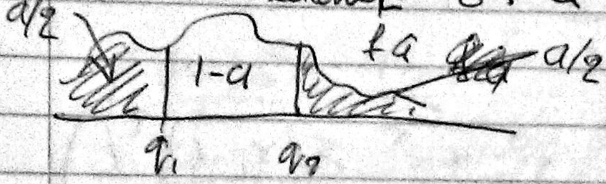
$$\Rightarrow \boxed{q_1^{2} f_{\chi_n^2}(q_1) = q_2^{2} f_{\chi_n^2}(q_1)} \quad (3)$$

όπου $f_{\chi_n^2}(q) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} q^{n/2-1} e^{-q/2}, \; q>0$

Άρα η παραπάνω εξίσωση δεν έχει αναλυτική λύση. Μπορώ όμως αριθμητικά να βρω αριθμητική λύση για q_1, q_2 από τη λύση του συστήματος (3) και (*)

Όταν δεν μπορούμε να βρούμε διάστημα εμπιστοσύνης δ.ε. ελαχίστου μήκους καταφεύγουμε σε δ.ε. ίσων ουρών

δ.ε ίσων ουρών είναι εκείνο που επιλέγει τα q_1, q_2 έτσι ώστε να κόβουν από την κατανομή της Q ίσες ουρές



$$P(Q > q_2) = \frac{a}{2} = P(Q < q_1)$$

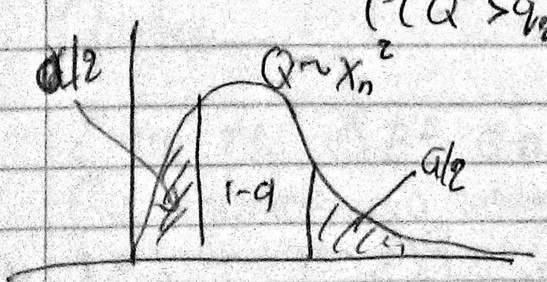
δ.ε ίσων ουρών για το σ^2 όταν μ = γνωστό

Είναι $100(1-a)\%$ δ.ε. για σ^2 είναι $\left(\frac{\Sigma(x_i-\mu)^2}{q_2}, \frac{\Sigma(x_i-\mu)^2}{q_1}\right)$

Το ίσων ουρών απαιτεί τα q_1, q_2 να είναι τέτοια ώστε

$$P(Q > q_2) = \frac{a}{2} = P(Q < q_1)$$

$$P(\chi_n^2 > q_2) = \frac{a}{2} \text{ και } P(\chi_n^2 < q_1) = \frac{a}{2}$$



αναστρ. σημείων || εκατοστιαίων χ^2_n

$$\boxed{q_2 = \chi^2_{n, a/2}}$$

$P(\chi_n^2 < q_1) = a/2$

$\Rightarrow 1 - P(\chi_n^2 > q_1) = a/2$

$\Rightarrow P(\chi_n^2 > q_1) = 1 - \frac{a}{2} \longrightarrow \boxed{q_1 = \chi^2_{n, 1-a/2}}$

Συγκεντρωτικά

Το 100(1-a)% δ.ε. ίσων ουρών για ~~[illegible]~~ την σ^2 όταν μ είναι γνωστό

$$\left(\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,a/2}}, \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-a/2}}\right)$$

<u>Παρατήρηση</u>

Το δ.ε. ίσων ουρών για την σ : $\left(\sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,a/2}}}, \sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-a/2}}}\right)$

$$\cancel{\left(\sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,a/2}}}, \sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-a/2}}}\right)}$$

Πράγματι: $1-a = P\left(\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,a/2}} < \sigma^2 < \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-a/2}}\right)$

$$= P\left(\sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,a/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-a/2}}}\right)$$

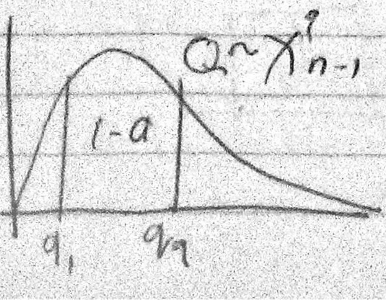
<u>II) μ: άγνωστο</u>

Θεωρώ $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ (ανεξ. σ^2)

Άρα Q = αντιστρεπτή

Αφού Q αντιστρεπτή

$\exists\, q_1, q_2 : 0 < q_1 < q_2$ τέτοια ώστε: $P(q_1 < Q < q_2) = 1-a$



ή $F_{\chi^2_{n-1}}(q_2) - F_{\chi^2_{n-1}}(q_1) = 1-a$

ή $\int_{q_1}^{q_2} f_{\chi^2_n}(q)\,dq = 1-a$

Όπως και πριν ίσως μπορεί να βρεθεί δ.ε. ελαχ. μήκους, αυθαίρετα

↓ καταφεύγουμε

δ.ε ίσων ουρών, πως;

Απαιτώντας

$$P(Q > q_2) = \frac{a}{2} = P(Q < q_1)$$

$$P(Q > q_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow P(\chi^2_{n-1} > q_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow q_2 = \chi^2_{n-1, a/2}$$

$$P(Q < q_1) = \frac{a}{2} \Rightarrow 1 - P(Q > q_1) = \frac{a}{2} \Rightarrow P(Q > q_1) = 1 - a/2 \Rightarrow q_1 = \chi_{n-1, 1-a/2}$$

Συνοπτικά το $100(1-a)\%$ δ.ε για σ^2 όταν μ άγνωστο

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, a/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-a/2}} \right)$$

$$1 - a = P(q_1 < Q < q_2) = P\left(q_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q_2\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right)$$

Παρατήρηση: Το $100(1-a)\%$ δ.ε για σ

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, a/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-a/2}}} \right)$$

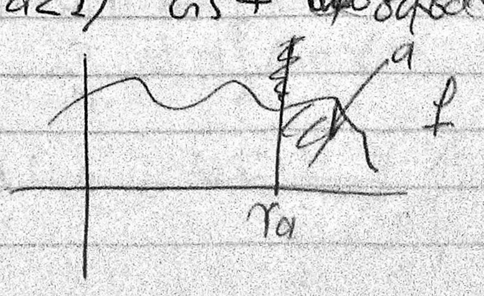
<u>Ορισμός</u> (α-εκατοστιαίο ή ποσοστιαίο σημείο)

Έστω τ.μ. X με σ.π.π $f(x)$

Το a-εκατοστιαίο σημείο (με $0<a<1$) της f συμβολίζεται με x_a και ορίζεται να είναι το σημείο

$$P(X > x_a) = a$$

ή $\int_{x_a}^{\infty} f(x)\,dx = a$



Δύο ανεξάρτητα δείγματα από $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

Έστω τ.δ. $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ από πληθ. $N(\mu_1,\sigma_1^2)$

~~και στο [illegible]~~

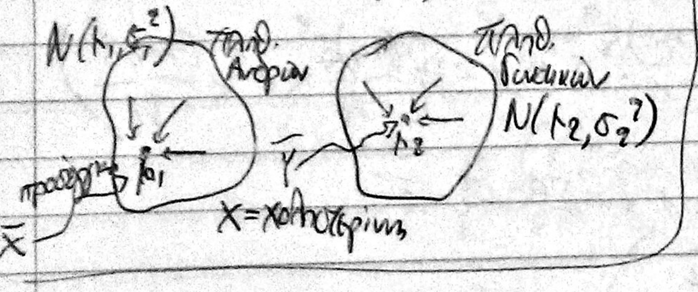
και τ.δ $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ από πληθ. $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

Υποθέτω ότι τα δείγματα είναι ανεξάρτητα

Θα ενδιαφερθούμε:
- (i) δ.ε. για $\mu_1-\mu_2$
- (ii) δ.ε για $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

(Δηλ. θα ενδιαφερθούμε για σύγκριση των μέσων τιμών και των διακυμάνσεων)

Γιατί να ενδιαφερθούμε;



(I) δ.ε για $\mu_1-\mu_2$ όταν σ_1^2, σ_2^2 γνωστές

$X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από $N(\mu_1,\sigma_1^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$

$Y_1,\dots,Y_n$ τ.δ. από $N(\mu_2,\sigma_2^2) \Rightarrow \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

Επειδή τα δείγματα είναι ανεξάρτητα, οι $\bar{X}, \bar{Y}$ ανεξ.

$$\Rightarrow \bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \text{ ανεξ. } \mu_1,\mu_2$$

Άρα Q αντιστρ.

Αφού Q αντιστρ. $\exists\ -\infty < q_1 < q_2 < +\infty$
έτσι ώστε:

$$1-a = P(q_1 < Q < q_2) = P\left(q_1 < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < q_2\right) =$$

$$= P\left(\bar{X}-\bar{Y}-q_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < \bar{X}-\bar{Y}-q_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

Άρα ένα $100(1-a)\%$ δ.ε. για $\mu_1-\mu_2$

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-q_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ,\ (\bar{X}-\bar{Y})-q_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

Ακολουθώντας (πανομοιότυπα) την πορεία του δ.ε. για μ όταν σ^2 γνωστό.

Το δ.ε. ελαχίστου μήκους προκύπτει
για $q_1 = -z_{a/2}$, $q_2 = z_{a/2}$

δ.ε. για $\mu_1-\mu_2$ όταν σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα αλλά ίσα
$(\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2)$

Όπως πριν $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \equiv N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$
Όμοια $\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \equiv N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$

$$\Rightarrow \bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \Rightarrow \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Όμοια $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$

$\Big\}$ ανεξ. $\Rightarrow$

ανεξ. $\Rightarrow \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_1-1)+(n_2-1)}$

$$\rightarrow S_p = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_1+n_2-2)}$$

Θεωρώ $Q = \frac{Z}{\sqrt{S_p/(n_1+n_2-2)}}$ Τότε προφανώς $Q \sim t_{n_1+n_2-2}$

$$\stackrel{d}{=} \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n_1+n_2-2}}{n_1+n_2-2}}}$$

Επιπλέον η κατανομή της Q είναι $t_{n_1+n_2-2}$ και δεν εξαρτάται από μ_1, μ_2. Άρα Q αντιστρεπτό

Από αλγεβρικές πράξεις:

$$\boxed{Q = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}$$

Αφού Q αντιστρεπτής $\exists -\infty < q_1 < q_2 < +\infty$:

$$1-a = P(q_1 < Q < q_2)$$

$$= P\left(q_1 < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < q_2\right.$$

Λύνουμε ανισότητα ως προς $\mu_1-\mu_2$ ~~...~~ ένα $100(1-\alpha)\%$ δ.ε για $\mu_1-\mu_2$ είναι:

$$\left((\bar{x}-\bar{y})-q_2\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ (\bar{x}-\bar{y})-q_1\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

Το δ.ε ελαχίστου μήκους
προκύπτει για $q_1=-t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$, $q_2=t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$

<u>δ.ε για σ_1^2/σ_2^2</u>

F_{n_2-1,n_1-1} ανεξ.

$$\left.\begin{aligned}\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}&\sim\chi^2_{n_1-1}\\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}&\sim\chi^2_{n_2-1}\end{aligned}\right\}\xRightarrow{\text{Διαιρώ}}$$

<u>Θεωρώ</u>

$$\frac{\chi^2_{n_2-1}/(n_2-1)}{\chi^2_{n_1-1}/(n_1-1)}=\frac{\dfrac{\cancel{(n_2-1)}S_2^2}{\sigma_2^2\cancel{(n_2-1)}}}{\dfrac{\cancel{(n_1-1)}S_1^2}{\sigma_1^2\cancel{(n_1-1)}}}=\frac{\sigma_1^2S_2^2}{\sigma_2^2S_1^2}$$

Θεωρώ την $Q=\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\dfrac{S_2^2}{S_1^2}$

Η $Q\sim F_{n_2-1,n_1-1}$ ανεξ. την $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

Άρα Q αντιστρέψιμη
Αφού Q αντιστρέψιμη $\exists\ 0<q_1<q_2<+\infty$

$$\begin{aligned}1-\alpha&=P(q_1<Q<q_2)\\&=P\left(q_1<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\frac{S_2^2}{S_1^2}<q_2\right)\\&=P\left(q_1\frac{S_1^2}{S_2^2}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<q_2\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\end{aligned}$$

Άρα $\left(q_1 \frac{S_1^2}{S_2^2} , q_2 \frac{S_1^2}{S_2^2} \right)$ είναι ένα δ.ε

Ίσων αριών